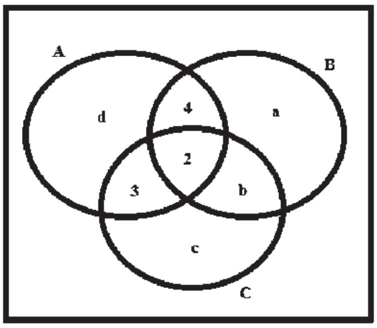
## • FOLHA Nº 01 – GABARITO COMENTADO •

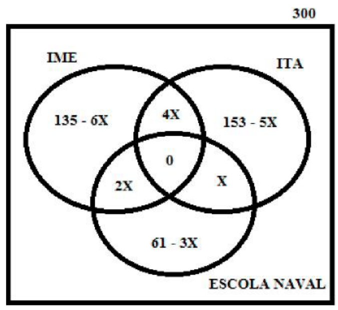
1)




$a + b + c + d + 4 + 2 + 3 = 21$
$a + b + c + d + 9 = 21$
$a + b + c + d = 12$ ( I )

$a + b + c + 2 + 3 + 4 = 18$
$a + b + c + 9 = 18$
$a + b + c = 9$ ( II )

substituindo ( II ) em ( I ):
$9 + d = 12$
$d = 3$
**n**[**A** – (**B** ∩ **C**)] = 3 + 4 + d = 10
**OPÇÃO E**




2) • Candidatos que farão ITA e NAVAL = x
• Candidatos que farão IME e NAVAL = 2x
• Candidatos que farão IME e ITA = 4x
• Canditados que farão IME, ITA e NAVAL = zero
• IME = 135
• Candidatos que farão apena IME = 135 – (IME e NAVAL) – (IME e ITA) = 135 – 6x ITA = 153
• Candidatos que farão apenas ITA = 153 – (ITA e IME) – (ITA e NAVAL) = 153 – 5x NAVAL = 61
• Candidatos que farão apenas NAVAL = 61 – (NAVAL e ITA) – (NAVAL e IME) = 61 – 3x
$135 - 6X + 4X + 153 - 5X + 61 - 3X + X + 2X = 300$
$349 - 7X = 300$
$7X = 49$
$X = 7$
• Candidatos que farão apenas NAVAL:
$61 - 3x = 61 - 21 = 40$
**OPÇÃO C**

3) Para um número cujo algarismo das dezenas é **a** e cujo algarismo das unidades é **b**, temos 10a + b = 2 (a + b) ou a + b = 2 (10a + b). A segunda equação não tem soluções positivas, e na primeira equação temos 10a + b = 2 (a + b) ⇔ 10a + b = 2a + 2b ⇔ 8a = b. Necessariamente temos a = 1 e b = 8. De fato, no cartão de número 18 a soma dos algarismos é 9.
**OPÇÃO A**

4) Como temos 14 + 10 = 24 torcedores não corintianos, na fila deve existir, sempre entre dois torcedores corintianos, exatamente um torcedor de outra equipe.
**OPÇÃO E**

5) $10a+b=5(a+b)\Rightarrow 5a=4b\Rightarrow a=4, b=5\Rightarrow 54=6\times 9$

**OPÇÃO C**

6) Seja XYZ um número de três dígitos que detona 314. Devemos ter X = 4, 5, 6, 7, 8 ou 9; Y = 2, 3, ..., 9 e Z = 5, 6, 7, 8 ou 9. Portanto, temos 6 opções para o primeiro dígito, 8 para o segundo e 5 para o terceiro. Ou seja 6 x 8 x 5 = 240.

**OPÇÃO B**

7) Seja P o número de funcionários que falam Português e I o número de funcionários que falam Inglês. É fácil ver que,

$$\frac{20}{100}\cdot P+\frac{20}{100}\cdot I=I\Rightarrow P=4I.$$

Além disso, $4I+I-\frac{20}{100}.I=84\Rightarrow I=20.$ Com isso, o número de funcionários que falam as duas línguas é $\frac{20}{100}\cdot 4I=16.$

**OPÇÃO D**

8) No número existem 502 algarismos 2 e 502 algarismos 9. Para retirar a menor quantidade possível de algarismos, devemos tentar deixar a maior quantidade possível de algarismos 2. Porém, a soma de todos os algarismos 2 é 1004. Ainda falta 1004 para completar a soma 2008. Como 1004 = 9 x 111 + 5 devemos deixar pelo menos 111 algarismos 9. Porém, é impossível deixar exatamente 111 algarismos 9. Se deixarmos 112 algarismos 9, devemos deixar 500 algarismos 2. Portanto, deve-se retirar no mínimo 2 + 390 = 392 algarismos.

**OPÇÃO C**

9) Podemos utilizar apenas os 6 dígitos 0,1,3,4,6,9. Para o dígito das centenas temos 5 possibilidades, não podemos utilizar o dígito 0, para escolhermos os demais dígitos temos 6 possibilidades. Assim pelo princípio multiplicativo, temos 5 × 6 × 6 = 180 números.

**OPÇÃO C**

10) Os números $1^2$, $2^2$, $3^2$ possuem um algarismo. Os números $4^2$, $5^2$, ..., $9^2$ possuem dois algarismos. Os números $10^2$, $11^2$, ..., $31^2$ possuem três algarismos. Assim, ao escrever o quadrado do número 31, o número de algarismos escritos é 1 x 3 + 2 x 6 + 3 x 22 = 81, faltando escrever 19 algarismos. Com os quadrados de 32, 33, 34 e 35, temos mais 4 x 4 = 16 algarismos, faltando ainda escrever apenas três algarismos. Como o quadrado de 36 é 1296, concluímos que o último algarismo escrito foi o 9, o centésimo algarismo escrito por Esmeralda.

**OPÇÃO A**

11) Como $8^{8^{\cdot^{\cdot^{8}}}}\underset{9}{\equiv}(-1)^{8^{\cdot^{\cdot^{8}}}}\underset{9}{\equiv}1,$ a soma dos dígitos de todos os números que Agilulfo deve escrever é congruente a 1 módulo 9.

Portanto, quando Agilulfo obtiver um número de um único dígito, ele vira 1.

**OPÇÃO A**

12) $$\frac{x-5\sqrt{2006}}{4-y\sqrt{2006}}\cdot\frac{4+y\sqrt{2006}}{4+y\sqrt{2006}}=\frac{4x-5y\cdot 2006+(xy-20)\sqrt{2006}}{16-2006y^2}$$

Como $\sqrt{2006}$ é irracional, devemos ter $xy-20=0\Leftrightarrow xy=20$.

**OPÇÃO A**

13) Multipliquemos primeiro os dois últimos radicais

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

Obtemos : $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

Agora multipliquemos este fator encontrado pelo segundo fator da expressão

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

Obtemos: $\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Finalmente multipliquemos este resultado pelo primeiro fator da expressão

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}=1$$

**OPÇÃO C**

14) $\dfrac{3^n\left(3^{-2}+3^{-1}+1+3\right)}{2^n\left(2^{-2}+2^{-1}+1+2\right)}=\dfrac{7^n\left(10\,.\,7+2\right)}{7^n\left(7^2-37\right)}$

$\dfrac{3^n\,.\,\dfrac{40}{9}}{2^n\,.\,\dfrac{15}{4}}=\dfrac{72}{12}\rightarrow\dfrac{3^n}{2^n}\,.\,\dfrac{40}{9}\,.\,\dfrac{4}{15}=6\rightarrow\dfrac{3^n}{2^n}=\dfrac{81}{16}$, logo

$n=4$

**OPÇÃO E**

15) $\sqrt{3+2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}-\sqrt{3-2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$

$\sqrt{3+2\sqrt[6]{8}}-\sqrt{3-2\sqrt[6]{8}}$

$\sqrt{3+\sqrt[6]{512}}-\sqrt{3-\sqrt[6]{512}}$

seja $=\sqrt{3+\sqrt[6]{512}}-\sqrt{3-\sqrt[6]{512}}$

$\left(\sqrt{3+\sqrt[6]{512}}-\sqrt{3-\sqrt[6]{512}}\right)$

$3+\sqrt[6]{512}+3-\sqrt[6]{512}-2\sqrt{\left(3+\sqrt[6]{512}\right)\left(3-\sqrt[6]{512}\right)}$

$3+3-2\sqrt{(3)2-\left(\sqrt[6]{512}\right)^2}$

$6-2\sqrt{9-8}$

$x^2=4$

$x=2$

**OPÇÃO B**

16) Como $3^2 < 10$, temos . $3^{400} < 10^{200}$. Além disso, como $3^4 > 2^3\,.\,10$, também temos $3^{400} = (3^4)^{100} > (2^3\,.\,10)^{100} = 2^{300}\,.\,10^{100}$. Note que $2^4 = 16 > 10$ , e assim $3^{400} = 2^{300}\,.\,10^{100} = (2^4)^{75}\,.\,10^{100} > 10^{175}$. Daí, podemos concluir que $3^{400}$ possui entre 175 e 200 dígitos.

**OPÇÃO C**

17) Se o número inteiro positivo é n = abcd, em que a é o 1° algarismo, b é o 2°, c é o 3° e d é o 4°, então:

$a^2+d^2=58$ (I)

$b^2+c^2=52$ (II)

abcd – 3816 = dcba

2) Os quadrados dos algarismos decimais que podem satisfazer são: $0^2=0$, $1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$, $4^2=16$, $5^2=25$, $6^2=36$, $7^2=49$

3) Os únicos algarismos que satisfazem (I) são: (a = 3 e d = 7) ou (a = 7 e d = 3), pois 9 + 49 = 58.

4) Os únicos algarismos que satisfazem (II) são: (b = 4 e c = 6) ou (b = 6 e c = 4), pois 16 + 36 = 52.

5) Os possíveis números n são 3467, 3647, 7463 ou 7643.

6) O único número n que satisfaz é 7463, pois 7463 – 3816 = 3647. Resposta: O número n é 7463.

18) Se a afirmação falsa fosse de Márcio ou de Souto, significaria que Vanderlei e Danilo fizeram afirmações verdadeiras. Mas se Danilo tivesse todas as cartas vermelhas, só haveria 3 números disponíveis para Vanderlei pegar. Então, a afirmação falsa só pode ser de Vanderlei ou de Danilo.

Se a afirmação falsa foi de Vanderlei, Danilo deve ter as 5 cartas vermelhas, então sobram as 5 cartas verdes para Márcio. Mas assim não há como Souto possuir 3 cartas de um mesmo número. A afirmação falsa não pode ser de Vanderlei.

Se a afirmação falsa foi de Danilo, então podemos montar a seguinte tabela de cartas e assinalar a inicial de quem possui cada uma

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Azul | A | B | B | D | D |
| Amarelo | A | B | B | D | D |
| Verde | A | C | C | B | D |
| Vermelho | A | C | C | C | A |

Assim, só Danilo pode ter feito a afirmação falsa.

**OPÇÃO B**

19) 2 a 9 – 8 números – 8 algarismos

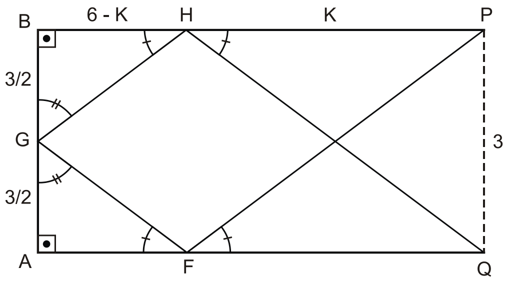
10 – 99 – 90 números – 180 algarismos

Ainda restam 1818 algarismos e portanto ainda conseguimos formar 606 números de 3 algarismos. Assim, o livro de Pedro Antônio tem 9 + 90 + 606 = 705 páginas.

**OPÇÃO E**

20) Entre os números 1 e 100 o algarismo 2 aparece dez vezes como dígito das dezenas e dez vezes como dígito das unidades. O mesmo ocorre com os algarismos 4, 6 e 8. Portanto, a soma pedida é $20 \cdot (2+4+6+8) = 400.$

**OPÇÃO C**

21) 


$\Delta HPQ \cong \Delta FQP(L.A.A_o) \Rightarrow HP = FQ = K$ e $PF \cong HQ$

$\Delta BHG \cong \Delta AFG(L.A.A_o) \Rightarrow AG = BG = \dfrac{3}{2}$ e HG = GF

$\Delta AGF \sim \Delta QPF \Rightarrow \dfrac{\frac{3}{2}}{3} = \dfrac{6-K}{K} \Rightarrow K = 4$

No $\Delta GBH$: $GH^2 = 2^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow GH = \dfrac{5}{2}$

No $\Delta$ HPQ: $HQ^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow HQ = 5$

Logo, a distância total percorrida pelo feixe luminoso no trajeto PFGHQ é

PF + FG + GH + HQ = 5 + 5/2 + 5/2 + 5 = 15 cm.

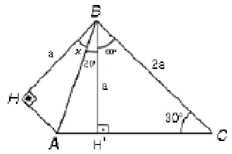
**OPÇÃO B**

22) A circunferência de centro A e raio AB contém os pontos C, D e E. Logo a medida do ângulo inscrito $E\hat{B}C$ é igual a metade da media do ângulo central $E\hat{A}C$ ou seja, $\beta = \dfrac{2\alpha}{2} = \alpha = 18°$.

**OPÇÃO A**

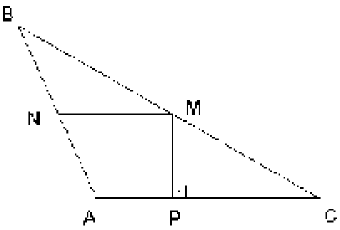
23) Como CE = CD, $m\left(C\hat{E}D\right) = (180° - 20°) \div 2 = 80°$. Logo $m\left(C\hat{E}D\right) = 180° - 80° = 100°$ e, como BE = CE, $\beta = (180° - 100°) \div 2 = 40°$ . Além disso, $m\left(B\hat{E}A\right) = m\left(C\hat{E}D\right) = 80°$ e, AE = BE, $\alpha = (180° - 80°) \div 2 = 50°$. Portanto o valor da razão $\dfrac{\alpha}{\beta}$ é $\dfrac{50°}{40°} = \dfrac{5}{4}$.

**OPÇÃO D**

24) 


Observe que os triângulos ABH e ABH', são congruentes. Daí o ângulo $A\hat{B}H = A\hat{B}H' = 20°$.

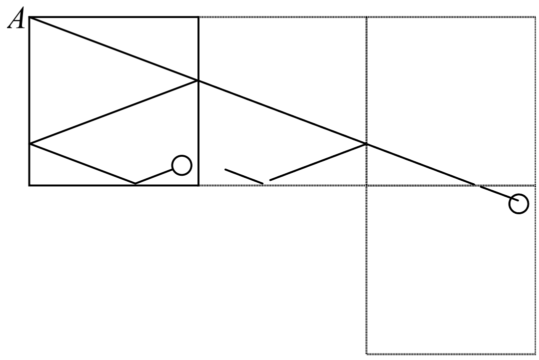
**OPÇÃO D**

25) 


Os triângulos BNM e BAC são semelhantes pelo caso LAL, então os segmentos AC e NM são paralelos. Assim, os ângulos NMP e MPC devem ser iguais, e como MPC é igual a 90°, temos que NMP também é igual a 90°.

**OPÇÃO D**

26) Como a bola sofre reflexão perfeita, ao refletir a mesa em relação a cada lado em que a bola bate obtém-se uma linha reta. Repetindo as reflexões obtemos a seguinte figura, em que a trajetória da bola é reta:




Assim, o problema é equivalente a encontrar uma trajetória em um retângulo de dimensões inteiras m e n, dividido em mn quadradinhos unitários, que começa em um vértice, termina no vértice oposto e corte os lados dos quadradinhos unitários 2010 vezes, sem passar por nenhum dos vértices internos dos quadrados unitários (pois se passasse, a bola chegaria a um vértice do quadrado antes de 2010 rebatidas nos lados).

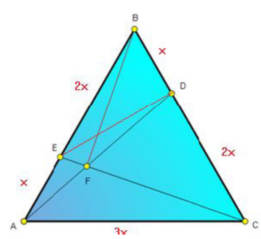
Como a bola deve atravessar $m - 1$ quadrados em um sentido e $n - 1$ no outro, $m - 1 + n - 1 = 2010 \Leftrightarrow m + n = 2012$; como a bola não passa por vértices do quadrado unitário, $mdc(m, n) = 1 \Leftrightarrow mdc(m, m + n) = 1 \Leftrightarrow mdc(m, \varnothing(2012) = \varnothing(2^2 \times 503) = 2012\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{503}\right)=1004$.

**OPÇÃO D**

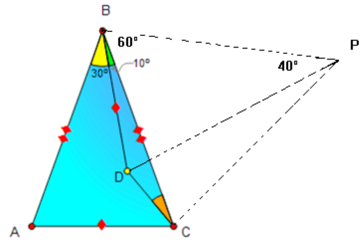
27) Observe que o quadrilátero BEFD é inscritível e que o ângulo BED = 30° = BFD

O ângulo BFC =BFD +CFD = 30 + 60 = 90°

**OPÇÃO B**



28) Vamos construir o triângulo equilátero BCP, como na figura.



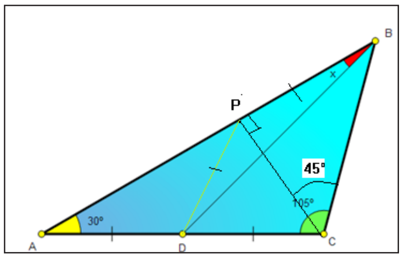
Como BD = AC, conclui-se, portanto que os triângulos ABC e BDP são congruentes.

Como a medida do ângulo CPD = 20°, logo a medida do ângulo BDC = 150°.

O ângulo assinalado (BCD ) + 10° + 150° = 180°, então a medida do ângulo BCD = 20°

**OPÇÃO C**

29) O triângulo ACP é retângulo e DP é a mediana relativa à hipotenusa.



Observe que AD = DC = DP = CP = PC.

O ângulo PDB = PBD = x = 15°

**OPÇÃO C**